(Brown y Van Lehn). La regla que se utiliza para llenar ese vacío dependerá de la comprensión del algoritmo. Pues las reglas operatorias erróneas están en general en conflicto con las propiedades estructurales de los números.

— La enseñanza «conceptual» de un algoritmo da mejores resultados a largo plazo frente a la enseñanza «mecánica», que es más eficiente a corto plazo (Brown y Moser).
— La búsqueda de distintos algoritmos y la comparación entre ellos ante una misma situación hará que se utilice de forma más significativa.
— Debe cuidarse que la presentación de los materiales no induzca a error.

REFERENCIAS

APARICIO, J. J. y ZACCAGNINI, J. L.: «Memoria y adquisición del conocimiento», *Estudios de Psicología, 2,* 77-92, 1980.
BELL, A. W.: *The learning of general Mathematical strategies,* Shell Centre from Mathematical Education, University of Nottinghan, 1976.
COLLIS, K. F.: «Cognitive develpement and Mathematics learning», *The Psychology of Mathematics Education Series.* Universidad de Londres, 1974.
DICKSON, J. y otros: *Children learning Mathematics: A Theacher's guide to recent research.* Halt Education for the School Covnal, 1984.
DONALDSON, M.: *La mente de los niños,* Madrid, Morata, 1979.
PAPERT, S.: *Desafío a la mente,* Buenos Aires, Galápago, 1981.
RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, Professional reference series. National Council of Teacher's Mathematics, 1980.

La adquisición de la adición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos

Vicente Bermejo y María Oliva Lago
Universidad Complutense de Madrid

El interés de los estudios sobre la adquisición de conceptos matemáticos se cifra al menos en dos aspectos: por una parte en el intento de especificar principios psicológicos más generales que intervienen en el aprendizaje, por ejemplo, o simplemente de analizar procesos cognitivos básicos, y, por otra, en el deseo de desarrollar y cooperar en la definición de unas líneas básicas que sirvan de referencia para la programación e instrucción de las matemáticas. Sin embargo, el distanciamiento entre teoría y práctica suele ser en general considerable en el ámbito psicológico, incluso en áreas tan proclives a la aplicación como acontece en el tema estudiado en este trabajo. Hace escasos años, Carpenter (1981) escribía que lo que se desconocía sobre cómo los niños aprenden a sumar y restar era insignificante comparado con la disparidad existente entre lo que se conoce en torno a cómo los niños resuelven los problemas de adición y substracción y los programas actuales de instrucción. Y esto puede aún sostenerse siendo conscientes de que nuestros conocimientos son precarios y poco fundados sobre aspectos tan importantes como los procesos mismos de adquisición de estas nociones, o sobre la transición que tiene lugar para pasar de las estrategias informales con modelos y conteo, inventadas frecuentemente por los mismos niños, a los algoritmos formales aprendidos generalmente en la escuela o sobre el efecto mismo de la instrucción en la habilidad o estrategias utilizadas para sumar (Carpenter y Moser, 1983).

Hacia 1940 aproximadamente (Brownell, 1941) surge una nueva orientación en las investigaciones sobre nuestro tema que entronca perfectamente con las preocupaciones actuales, ya que centra sus esfuerzos en torno al estudio de la estructura de los problemas planteados y de las condiciones empíricas empleadas. Desde esta óptica se afirma, por ejemplo, que la forma canónica de la estructura del problema (A + B = ?) resulta ser la más sencilla para el niño (Grouws, 1972) y que la solución del problema se facilita cuando se permite la manipulación de objetos concretos e imágenes, sobre todo en los niños más jóvenes (Carpenter y Moser, 1982; Marshall, 1977; Steffe, 1970, etc.) Se defiende igualmente que la efectividad del uso de los dedos o de objetos concretos es similar, apareciendo a veces diferencias debido fundamentalmente a la práctica o ejercicio de los sujetos (Steffe, Spikes, y Hirstein, 1976). Finalmente se manifiestan ciertas diferencias existentes entre la solución de problemas con número y los puramente verbales (Jerman y Mirman, 1974).

Por otra parte, se sostiene que el desarrollo evolutivo de las operaciones de sumar y restar es similar, pero no idéntico al desarrollo descrito por Piaget y colaboradores con respecto a la conservación u otras operaciones concretas (Piaget e Inhelder, 1941; Piaget y Szeminska, 1941); de modo que si bien se encuentran correlaciones positivas entre los rendimientos matemáticos y el nivel evolutivo en la conservación, inclusión, etc. (Carpenter, 1980; Hiebert y Carpenter, 1982), ello no significa que los conceptos piagetianos constituyan un requisito para la adquisición de la adición. Al contrario, la mayoría de los investigadores actuales sobre nuestro tema no estudian las habilidades lógicas subyacentes (conservación, inclusión), para llegar a dibujar la línea evolutiva que recorre el niño en la adquisición de esta noción; sino que se basan en otras habilidades, como el contar, la estimación o la percepción inmediata («Subitizing») para especificar los procesos cognitivos responsables de su aprendizaje (Fuson y Hall, 1983; Gelman, 1982; Gelman y Gallistel, 1978; Klahr y Wallace, 1976, etc.).

Desde este enfoque, algunos autores analizan la posible relación existente entre los rendimientos obtenidos en la adición y substracción y el desarrollo en la habilidad para contar (Fuson, 1982; Steffe y otros, 1982), o bien afirman que los procesos de adquisición de la adición y substracción dependen del crecimiento de la capacidad central de procesamiento de información (Case, 1982); o bien, para terminar, proponen modelos integrativos que especifiquen las relaciones o conexiones existentes entre los rendimientos alcanzados en la adición y los conseguidos en contenidos básicos de otros ámbitos (Siegler y Robinson, 1982). Resnick (1983) propone, por una parte, el modelo «Línea Mental Numérica» para explicar la competencia cognitiva del niño preescolar, que es capaz de contar, realizar cierto tipo de comparación entre cantidades numéricas y resolver algunos problemas de aritmética informal; y, por otra, presenta el esquema parte-todo como modelo para especificar lo que los niños saben hacer al principio del primer ciclo de EGB.

El presente trabajo se enmarca dentro de esta última orientación y pretende dos objetivos fundamentales: por un lado, analizar la posible relación existente entre la conservación del número (Piaget y Szeminska, 1941) y los rendimientos en la solución de problemas de adición que presentan semejanzas notables con la situación empírica anterior; y, de otro, nuestro interés se centra prioritariamente en torno al estudio de las estrategias que emplean los niños para sumar, tanto en función de la edad de los mismos, como en función del tipo de sumandos presentados y el modo de representarlos, sea mediante objetos concretos manipulables, sea mediante imágenes, sea mediante guarismos.

METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Sujetos

La investigación se lleva a cabo en dos colegios nacionales del centro de Madrid, cuyos niños suelen pertenecer socioculturalmente a la clase media-alta. Dos muestras de 25 niños cada una, elegidos al azar, pasan las pruebas. La primera está formada por preescolares de segundo curso, de los que 12 son niños y 13 niñas, con edades comprendidas entre 5,3 y 6,2 años ($\bar{X}$ = 5,66). Los niños de la segunda muestra pertenecen a primero de EGB, siendo 13 niños y 12 niñas. Sus edades están comprendidas entre 6-4 y 7-2 años, con una media de 6,67 para los niños y de 6,73 para las niñas.

Material

En las tareas de conteo y de conservación, así como en la prueba IV, se utilizan fichas de parchís de 1 cm de diámetro, de las que la mitad son rojas y el resto azules. En la prueba de conservación, las fichas aparecen distribuidas uniformemente, sea a 1,1 cm sea a 2,3 cm, sea a 3,3 cm. Los sumandos empleados (5 + 12, 11 + 4 y 8 + 8) se presentan en tarjetas blancas de 7,5 × 10 cm, bien mediante guarismos, bien por medio de círculos rojos (1 cm) dispuestos verticalmente, bien simplemente con fichas de parchís. Se utilizan también los dos famosos muñecos de TVE, Epi y Blas, con el fin de de motivar a los niños y facilitar el planteamiento de las tareas.

Procedimiento empírico

Las pruebas se realizan en un despacho del colegio de dimensiones normales o habituales (4,5 × 3,5 m aproximadamente), sobre una mesa espaciosa en torno a la cual se sientan el niño y al menos dos investigadores, situados de tal modo que pueden oír lo que el niño dice y observar sus movimientos sobre todo los realizados con los dedos de las manos. La entrevista es individual y suele durar aproximadamente de 15 a 20 minutos, teniendo lugar durante el horario lectivo de los niños. Se intenta en todo momento que el niño se sienta a gusto y atraído por todo el proceso empírico. Se pasan tres bloques de pruebas de duración diferente: el primero se refiere al conteo, muy breve, que tiene el fin de determinar si el niño cuenta o sabe contar al menos hasta 18. El segundo bloque se limita a la conservación del número, solicitando tanto la construcción de una hilera similar al modelo (9 fichas de color rojo uniformemente espaciadas), como el parecer del niño después de espaciar o juntar una de las hileras. Finalmente, el tercer bloque de pruebas, que ocupa indiscutiblemente el centro de esta investigación, se refiere a la resolución de problemas de adición y consta de cinco pruebas, de las que cada una presenta tres problemas. El orden de las pruebas y el de los problemas dentro de cada prueba se ha hecho al azar. La elección del último par de sumandos tiene como fin, no sólo el de precisar el efecto del «doble» bien conocido en la literatura en torno al tema, sino también el de analizar las estrategias que los niños emplean cuando el segundo sumando supera los dedos de una mano y cuando la adición resultante transfiere la decena. Las dos adiciones restantes presentan el sumando inverso manifiestamente mayor que el otro, en orden a observar qué niños emplean la propiedad de la conmutatividad. Además, cuando el segundo sumando es mayor, este número supera los dedos de las dos manos; mientras que en el caso contrario los dedos de una mano son suficientes para representar o cuantificar el segundo sumando. En las cinco pruebas se varía el modo de representar los sumandos, de manera que en la I el primer sumando se representa con un guarismo y el segundo con círculos; en la II, se muestran dos tarjetas con círculos; en la III, el primero son círculos y el segundo un guarismo; en la IV ambos se representan con fichas; y finalmente, en la V se presentan dos guarismos.

Los problemas de adición se plantean presentando los dos conocidos personajes de TVE Epi y Blas, ubicados delante del sujeto, diciendo al niño, por ejemplo: «Epi tiene 5 fichas (situándose al mismo tiempo delante del muñeco el sumando correspondiente: fichas, tarjetas, etc.) y Blas tiene 12 (se repite ahora delante de Blas la misma acción). Ahora Blas da sus fichas a Epi, ¿cuántas tiene éste?» La situación se repite en cada uno de los problemas, pudiendo los niños manipular a su gusto los sumandos presentados.

Análisis y discusión de resultados

En las pruebas de conservación del número, el 7,25 de niños preescolares y el 10/25 de primero de EGB, se muestran conservadores, presentando argumentos de identidad simple o aditiva y en segundo lugar de conteo. Sólo un niño perteneciente al grupo de los mayores da un argumento de compensación. Los sujetos no conservadores suelen basar sus respuestas en la percepción espacial, sea afirmando que hay menos, porque están más juntas o la hilera es más corta, sea que hay más porque la hilera es más larga. Con respecto a la solución de los problemas aditivos, en las tablas N. 1 y 2 se recogen los porcentajes de aciertos de ambos grupos, apareciendo a simple vista que estos resultados son superiores a los obtenidos en la conservación, especialmente en los niños mayores. Ahora bien, todos los niños conservadores se comportan acertadamente en los problemas aditivos; en cambio, hay niños que fracasan en las tareas de conservación, y sin embargo, resuelven correctamente todas las pruebas de adición. Por su parte, los niños de preescolar conservadores suelen fracasar en alguno de los problemas aditivos (excepto dos niños que alcanzan un éxito completo), sobre todo en la prueba V, cuando los dos sumandos son guarismos. En cambio, dos niños no conservadores llegan a la solución correcta en todos los problemas de suma. En consecuencia, la conservación del número no parece ser una condición indispensable para aprender a

TABLA 1

Porcentaje de aciertos de los niños preescolares en función de las pruebas y problemas de adición

Pruebas	Problemas			Totales
	A	B	C	
I	48	60	48	52
II	84	92	84	86.67
III	32	48	44	41.33
IV	88	88	100	92
V	28	48	36	37.33
Totales	56	67,2	62.4	

TABLA 2

Porcentaje de aciertos de los niños de primero de E.G.B. en función de las pruebas y problemas de adición

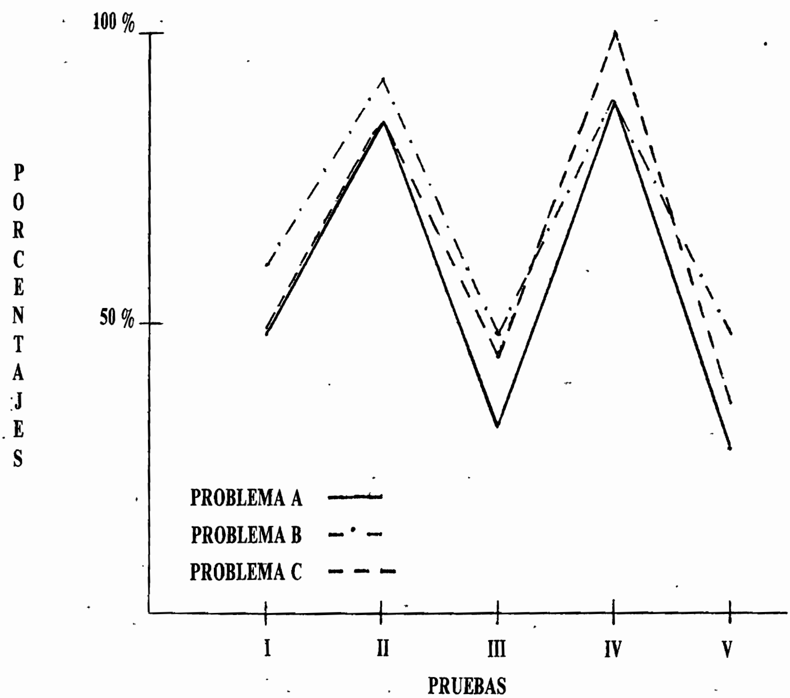
Pruebas	Problemas			Totales
	A	B	C	
I	92	100	92	94.67
II	100	100	100	1.00
III	88	96	88	90.67
IV	96	96	96	96
V	84	92	84	86.67
Totales	92	96.8	92	

sumar, de modo que si bien parece existir una cierta similitud entre los procesos cognitivos que conducen a la solución de ambas tareas, no obstante, los segundos se manifiestan más precozmente que los primeros. Además, en los niños pequeños los procedimientos empleados para resolver los problemas aditivos suelen ser de conteo, si el carácter de los sumandos lo permite, como acontece en la prueba IV; confirmándose de algún modo la orientación defendida sobre todo por Gelman (1982, 1985). Sin embargo, esta estrategia podría basarse en una comprensión primitiva del esquema parte-todo, propuesto por Resnick (1983).

Ateniéndonos exclusivamente a los problemas de adición, conviene señalar que resultan demasiado sencillos para los niños mayores, que llegan a alcanzar incluso el 100 % de aciertos en la prueba II y casi en la IV. En cambio, a los sujetos preescolares se les facilita el éxito si se pone a su disposición objetos concretos (fichas) para representar los sumandos (92 % de éxitos); mientras que los errores se incrementan al máximo cuando sólo se presentan guarismos (37,3 % de aciertos). Así puede constatarse visualmente en la figura 1, Con respecto a la disposición de los sumandos utilizados, el problema A (5 + 12) es el que más dificultades presenta para los niños pequeños, independientemente de la naturaleza de los mismos sumandos, seguido del C (8 + 8). Este resultado no parece confirmar el esperado efecto del «doble» debido probablemente a que se trata de un número demasiado alto (8) no pudiendo representarse con los dedos de una sola mano.

FIGURA 1

Porcentajes de aciertos obtenidos por los niños preescolares en los problemas de adición.



En cuanto a las estrategias empleadas por los escolares, las tres más usadas son las siguientes: el contar con los dedos, que constituyen el 50 % aproximadamente, contar imágenes y finalmente, soluciones memorísticas; aunque su empleo varía en función de las pruebas y de los problemas. Así, en la prueba IV, la mayoría de los niños se limitan a contar fichas, siendo menos frecuente el uso de los dedos. Igualmente, el problema A motiva sobre todo estrategias MIN, en la terminología propuesta por Groen y Parkman (1972), es decir, los niños cuentan a partir del segundo sumando; mientras que en los otros dos problemas predomina el contar a partir del primer sumando. Con respecto a los niños pequeños, aparece una mayor diversificación de estrategias, que no obstante abreviaremos debido a limitaciones de espacio. Lo más relevante es el uso asiduo de la estrategia SUM (Suppes y Groen, 1967) con modelos, sean estos fichas, sean círculos, sean, con menos frecuencia, los dedos. Aparece también, aunque muy distanciada de la anterior, la estrategia de contar a partir del primer sumando, sobre todo en la prueba I y con el problema B, siendo aún menos frecuente el empleo de la estrategia MIN, que supone la aplicación de la propiedad conmutativa. La utilización del automatismo memorístico es más bien raro en estos niños manifestándose primordialmente en la situación de «doble». Una estrategia mixta, muy usada en las pruebas I y III, y que viene motivada por la manera de representar los sumandos, consiste en contar los círculos de uno de los sumandos, añadiendo después por conteo el otro sumando, sea mentalmente, sea con los dedos. Finalmente, hay cinco niños que suelen tratar los guarismos como si fueran objetos concretos e imágenes, contabilizándolos como tales al realizar la adición, a pesar de que estos sujetos cuentan perfectamente al menos hasta 18, y que suelen resolver acertadamente los problemas de suma, si los dos sumandos se representan mediante imágenes u objetos manipulables.

CONCLUSION

Una de las críticas más asiduas que los especialistas de nuestro tema hacen a la teoría piagetiana se refiere al olvido o infravaloración que muestra con respecto a la influencia del conteo, la estimación y la percepción inmediata («subitizing») en la adquisición de los conceptos matemáticos. Desde principios de la década anterior, Gelman (1972) entre otros autores, insiste en el papel central que desempeña el conteo en el aprendizaje de estos conceptos básicos. Otros autores, sobre todo Resnick (1983) proponen más bien el esquema parte-todo como fundamento básico para la comprensión de las operaciones que estamos estudiando, aproximándose a la posición piagetiana. Nuestros resultados ponen de relieve la importancia manifiesta que tiene el conteo en la solución de los problemas aditivos, principalmente en los sujetos más jóvenes. Sin embargo, tal como defendemos en otro trabajo (Bermejo y Rodríguez, 1986), esta estrategia de contar, sea mediante modelos o mentalmente, supone a nuestro juicio, una comprensión más o menos explícita por parte de los niños del esquema parte-todo.

BERMEJO, V. y RODRÍGUEZ, P.: El esquema parte-todo en la conservación y adición. *Comunicación a las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación,* 1986, Madrid.

BROWNELL, W. A.: Arithmetic in grades I and III: A critical summary of new and previously reported research. Duke University Research Studies in Education, N. 5. Durham: Duke University Press, 1941.

CARPENTER, T. P.: Cognitive development and mathematics learning. En R. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education,* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1980 (A).

CARPENTER, T. P.: Heuristic strategies used to solve addition and subtraction problems. En proceedings of the Fourth International Congress for the Psychology of Mathematics Education. Berkely, 1980 (b).

— Initial instruction in addition and subtraction: A target of opportunity for curriculum development. En Proceedings of the National Science Foundation Directors Meeting. Washington, 1981.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M.: The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1982.

CARPENTER, T. P. y MOSER, J. M.: Acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematic on concepts and processes.* Nueva York: Academic Press, 1983.

CASE, R. General Developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in arithmetic. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.): *Addition and subtraction: a Cognitive Perspective,* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1982.

FUSON, K.: An analysis of the counting-on solution procedure in addition. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds).: *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum 1982.

FUSON, K. y HALL, J. M.: The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking,* Nueva York: Academic Press, 1983.

GELMAN, R.: The nature and development of early number concepts, *Child development,* 1972, *7,* 115-167.

— Accesing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. *British Journal of Psychology,* 1982, *73,* 209-220.

GELMAN, R. y GALLISTEL, C. R.: *The child understanding of number.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1978.

GELMAN, R.: «The developmental perspective on the problem of Knowledge acquisition». En Chipman, Segal y Glaser (Eds.).: *Thinking and learning skills.* Vol. 2 Hillsdale: L.E.A., 1985.

GROEN, G. J. y PARKMAN, J. M.: «A chronometric analysis of simple addition». *Psychological Review,* 1972, *79,* 329-343.

GROUWS, D. A.: «Open sentences: some instructional considerarions from research». *Arithmetic Teacher,* 1972, *19,* 595-599.

HIEBERT, J. y CARPENTER T. P.: Piagetian tasks as readiness measures in mathematics instruction: A critical review. *Educational Studies in Mathematics,* 1982, *13,* 329-345.

JERMAN, M. y MIRMAN, S.: *Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics. Education Studies in Mathematics,* 1974, *5,* 3-28.

KLAHR, D. y WALLACE, J. G.: *Cognitive development: an information processing view,* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1976.

MARSHALL, G. G.: «A study of training and transfer effects of comparison subtraction and one-to-one correspondence». *Dissertation Abstracts International,* 1977, *37,* 4936A.

PIAGET, J. e INHELDER, B.: *Le development des quantités physiques chez l'enfant,* Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1941.

PIAGET, J. y SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant,* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1941.

RESNICK, L. B.: «A developmental theory of number understanding». En H. Ginsburg (Ed.): *The development of mathematical thinking,* Nueva York: Academic Press, 1982.

SIEGELER, R. S. yROBINSON, M.: «The Developmental of Numerical understanding». En H. W. Reese y L. P. Lipsitt (eds.) *Advances in Child Developmental and Behavior.* Vol. 6. Nueva York: Academic Press, 1982.

STEFFE, L. P.: «Differential performance of first-grade children when solving arithmetic addition problems», *Journal for research in mathematic education,* 1979, *10,* 370-374.

STEFFE, L. P., SPIKES, W. y HIRSTEIN, J.: Quantitive comparisons and class inclusion as readines variables for learning first grade arithmetic content. Athens, Georgia: The Georgia center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. University of Georgia, 1976.

STEFFE, L. P., THOMPSON, D. y RICHARDS, J.: «Children's counting in arithmetical problem solving». En Carpenter, T. P., Moser, J. M. y Romberg, T. A. (Eds.): *Addition and substraction: a cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1982.

SUPPES, P. y GROEN, G.: «Some counting models for first grade performance data on simple facts». En J. M. Scandura (Ed.), *Research in mathematics education,* Washington, D. C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1967.

Buceando en el proceso de resolución de problemas

Luis Puig y Fernando Cerdán

Universidad de Valencia

Introducción

La tradición indica que los problemas —si admitimos que cualquier cosa a la que se ha llamado tradicionalmente un problema(1) lo que es realmente— han sido siempre una parte importante de la educación matemática. Hoy en día el papel de la resolución de problemas en la educación matemática suele ser puesta de relieve desde distintos puntos de vista. Así, Halmos, como matemático profesional, hace hincapié en que «una parte considerable de la

(1) Si se quiere discutir el problema de qué es un problema, puede consultarse a Borasi (1986), por ser lo más reciente o mejor, Hill (s.f.) o bien confrontar, como se hace en Puig y Cerdán (1985), las definiciones de problema de Newell and Simon (1972) y Lesh (1982).